

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2025

Proba E.c)

Matematică M_mate-info

Barem de evaluare și de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

Scoala in Papuci

SUBIECTUL I

(30 puncte)

5p	1. $(1 - i)^3 = 1 - 3i + 3i^2 - i^3 = 1 - 3i - 3 + i = -2 - 2i$ $z^2 = -2 - 2i \Rightarrow z^2 + 2 + 2i = 0$ $\Rightarrow$ Ec. de gradul 2 are 2 rădăcini z_1 și z_2 cu $P = z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow P = 2 + 2i$	3p 2p
5p	2. $n^2 - 7n + 6 < 0 \Rightarrow n \in (1, 6) \cap \mathbb{N} \Rightarrow A = \{2, 3, 4, 5\}$ $C_n^2 \leq 10 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \leq 10 \Rightarrow n(n-1) \leq 20$ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow B = \{2, 3, 4, 5\}$ $B = A$ și $f: A \rightarrow A$ injectivă $\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow$ Nr. funcțiilor injective este $4! = 24$	3p 2p
5p	3. Condiții de existență: $\begin{cases} 2-x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2); 2-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 1 \\ x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -2)$ $\log_{2-x}(x^2 - 4) = \log_2 4 - 1 = \log_2 4 - \log_2 2 = \log_2 \frac{4}{2} = \log_2 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 4 = 2 - x \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x \in \{-3, 2\}$ Din $x \in (-\infty, -2) \Rightarrow$ soluția $x = -3$	2p 3p
5p	4. Nr. cazuri posibile = numărul submulțimilor de 3 elemente din A este $C_6^3 = 20$ Submulțimile: $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}$ au elementele în progresie aritmetică $\Rightarrow$ 6 cazuri favorabile $Probabilitatea = \frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$	2p 3p
5p	5. Dacă M e mijlocul lui BC $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{a+2}{2}\vec{i} + \frac{a-1}{2}\vec{j}$ G = centru de greutate $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{a+2}{3}\vec{i} + \frac{a-1}{3}\vec{j}$ $ \overrightarrow{AG} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{(a+2)^2}{9} + \frac{(a-1)^2}{9}} < 1 \Rightarrow (a+2)^2 + (a-1)^2 < 9 \Rightarrow$ $2a^2 + 2a - 4 < 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 < 0 \Rightarrow a \in (-2, 1)$	3p 2p
5p	6. $\cos 3x + \cos x = \cos 2x \Leftrightarrow 2 \cos \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2} = \cos 2x \Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x = \cos 2x$ $\Leftrightarrow 2 \cos 2x \cdot \cos x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x (2 \cos x - 1) = 0$ Pt. $\cos 2x = 0; 2x \in [0, 4\pi] \Rightarrow 2x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ Pt. $2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}; x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

5p	1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$ $(I_2 + A)(I_2 + \alpha A) = I_2 \Leftrightarrow I_2 + \alpha A + A + \alpha A^2 = I_2 \Leftrightarrow \alpha A + A = O_2 \Leftrightarrow (\alpha + 1)A = O_2$	3p
----	--	----

	$\Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow I_2 + \alpha A = I_2 - A$ Se verifică și: $(I_2 - A)(I_2 + A) = I_2^2 - A^2 = I_2 - O_2 = I_2$ În concluzie, avem $(I_2 + A)(I_2 - A) = (I_2 - A)(I_2 + A) = I_2 \Rightarrow (I_2 - A)^{-1} = I_2 + A$	2p
5p	b) $(I_2 + A)^n = C_n^0 \cdot I_2^n + C_n^1 \cdot I_2^{n-1} \cdot A + C_n^2 \cdot I_2^{n-2} \cdot A^2 + \dots + C_n^n \cdot A^n$ $I_2^k = I_2, \forall k \in \mathbb{N}; I_2^k \cdot A^S = A^S, A^2 = A^3 = \dots = A^n = O_2, \text{pt. } n \geq 2$ $\Rightarrow (I_2 + A)^n = C_n^0 \cdot I_2 + C_n^1 \cdot A$ $C_n^0 = 1, C_n^1 = n \Rightarrow (I_2 + A)^n = I_2 + nA$	2p 3p
5p	c) Din punctul a) avem că, dacă $B = I_2 + A$, atunci $B^{-1} = I_2 - A$ Pentru $k \in \mathbb{N}^*, B^{-k} = (B^k)^{-1} = [(I_2 + A)^k]^{-1} = (I_2 + kA)^{-1} = I_2 - kA$ Pt. că $(I_2 + kA)(I_2 - kA) = (I_2 - kA)(I_2 + kA) = I_2^2 - k^2 A^2 = I_2$ $I_2 + B + B^{-2} + B^3 + B^{-4} + \dots + B^{-2024} + B^{2025} =$ $= I_2 + (I_2 + A) + (I_2 - 2A) + (I_2 + 3A) + (I_2 - 4A) + \dots + (I_2 - 2024A) + (I_2 + 2025A) =$ $= 2026I_2 + (A - 2A) + (3A - 4A) + \dots + (2023A - 2024A) + 2025A =$ $= 2026I_2 - 1012A + 2025A = 2026I_2 + 1013A$ $\det(2026I_2 + 1013A) = \det \left[\begin{pmatrix} 2026 & 0 \\ 0 & 2026 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2026 & 2026 \\ -2026 & -2026 \end{pmatrix} \right] = \det \left[\begin{pmatrix} 2026 \cdot 2 & 2026 \\ -2026 & 0 \end{pmatrix} \right]$ $= 2026^2$	2p 3p
5p	2. a) „*” este comutativă $\Leftrightarrow x * y = y * x, \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow x + ay + 3 = y + ax + 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow x(1 - a) + y(a - 1) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow (1 - a)(x - y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 1$ Pentru $a=1$ se arată că legea este și asociativă	3p
5p	b) $I = [-3, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea “*” $\Leftrightarrow \forall x, y \in I \Rightarrow x * y \in I$ $x, y \in I \Rightarrow x \geq -3 \text{ și } y \geq -3 \Rightarrow x + y \geq -6 \Rightarrow x + y + 3 \geq -3 \Rightarrow x * y \in I$ $(x + 1) * (x + 2) * (x + 3) = x + 4 \Leftrightarrow (2x + 6) * (x + 3) = x + 4$ $\Leftrightarrow 3x + 12 = x + 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -4 \notin I = [-3, \infty)$	3p 2p
5p	c) $x * e = e * x = x, \forall x \in I$ “*” este comutativă $\Rightarrow x + e + 3 = x \Rightarrow e = -3 \in I = [-3, \infty)$ $x \in I, x$ este simetrizabil în raport cu legea “*” $\Leftrightarrow \exists x' \in I$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$ “*” este comutativă $\Rightarrow x * x' = -3 \Rightarrow x + x' + 3 = -3 \Rightarrow x' = -x - 6$ $x' \in I \Leftrightarrow x' \geq -3 \Leftrightarrow -x - 6 \geq -3 \Rightarrow x \leq -3$. Dar $x \geq -3$ pt. $x \in I \Rightarrow x = -3 =$ unicul element simetrizabil din I .	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

5p	1. a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow G_f$ admite asimptotă orizontală dreapta d: $y = 0$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty \Rightarrow G_f$ admite asimptotă verticală dreapta $x = 0$. $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty; \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty \Rightarrow G_f$ admite asimptotă verticală dreapta $x = -1$.	3p 2p
----	---	----------

5p	b) $f'(x) = \left(-\frac{1}{x(x+1)}\right)' = -\frac{1'x(x+1) - [x(x+1)]'}{x^2(x+1)^2} = -\frac{-[x(x+1)]'}{x^2(x+1)^2} = \frac{x'(x+1) + x(x+1)'}{x^2(x+1)^2} = \frac{x+1+x}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$. $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow 2x+1 = (x+1)^2 - x^2$ $\Leftrightarrow 2x+1 = x^2 + 2x + 1 - x^2 \Leftrightarrow 2x+1 = 2x+1(A).$	3p 2p
5p	c) $f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ $= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} [f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n)]^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \frac{-1}{(n+1)^2}\right]^{\frac{-(n+1)^2}{1}} \right\}^{\frac{-1}{(n+1)^2} n^2} =$ $e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{(n+1)^2} n^2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.	2p 3p
5p	2. a) $\int \frac{x}{f(x)} dx = \int \frac{x}{\frac{1}{x^2+1}} dx = \int x(x^2+1) dx = \int (x^3+x) dx$ $= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$	2p 3p
5p	b) $\int \frac{1}{(x^2+1)} dx = \arctg x + C \Rightarrow \int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow F$ este primitivă pentru funcția f. G derivabilă pe $(0, \infty)$ și $G'(x) = (\arctg \frac{1}{x})' = -\frac{(\frac{1}{x})'}{1+(\frac{1}{x})^2} = -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2+1} = f(x), \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow G$ este primitivă a lui f.	2p 3p
5p	c) F și G sunt primitive ale funcției $f \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}$, astfel încât $G(x) = F(x) + k, \forall x \in (0, \infty)$. Pentru $x=1 \Rightarrow k = G(1) - F(1) \Rightarrow k = \arctg 1 - \arctg 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$ $\Rightarrow F(x) = G(x), \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow$ au aceeași mulțime de primitive pe $(0, +\infty)$ $\Rightarrow \int F(x) dx = \int G(x) dx, \forall x \in (0, \infty).$	2p 3p

Scoala in Papuci